2024年2月実施

2024年度

理学研究科物理学専攻博士課程前期課程

入学試験問題（物理学）

[注意]

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- 大問は6問.
  - 理論物理学研究室を第1志望とする場合は大問1から4の4問を解答せよ.
  - 原子核・放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第1志望とする場合は，大問1から6のうち，4問を選択して解答せよ.
- 大問1問につき解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ.
- 解答用紙が4枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること.

1. ポテンシャル中の質量 $m\ (m > 0)$ の質点の運動を考える。図 1 の様に円筒座標系 (r, ϕ, z) を定義し、ポテンシャルが $U(r)$ と表されるものとする。以下、$\dot{x} \equiv dx/dt$ の様にドットは時間微分を表すものとする。

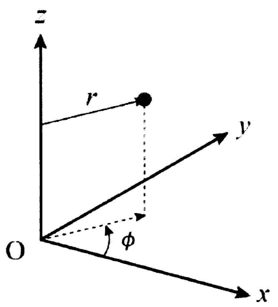

図 1

(a) 質点が xy 平面内で運動している場合を考える。原点 O を中心に半径 r の等速円運動をしているとき、原点のまわりの質点の角運動量の z 成分 M と、質点の受ける遠心力の大きさを、円筒座標とその時間微分を用いてそれぞれ表せ。

以下では、 xy 平面内の等速円運動に限らず、一般の運動を考える。

(b) 質点の直交座標における位置 x, y を、円筒座標を用いてそれぞれ表せ。

(c) 質点の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ を、v を使わず円筒座標を用いて表せ。但し、v は質点の速さであり、直交座標で表すと $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ である。

この系のラグランジアンは $L = \frac{1}{2}mv^2 - U(r)$ であり、質点の運動はラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

を満たす。ここで、一般座標 $q_i\ (i = 1,2,3)$ は r, ϕ, z を表す。

(d) (c)の結果を用いてラグランジュの運動方程式の z 成分を書き、保存量が存在する事を示せ。また、その保存量の物理的解釈を述べよ。

(e) (c)の結果を用いてラグランジュの運動方程式の ϕ 成分を書き、 M が保存する事を示せ。

(f) (c)の結果を用いてラグランジュの運動方程式の r 成分を書け。

(g) $U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\delta}{r^2}$ $(k, \delta = \text{定数})$ の時、(f)の結果を $\dot{\phi}$ の代わりに M を用いて具体的に書け。

2. 図 2 のように、真空中に電荷Qを与えた半径aの導体球 A とその外側に接地した半径b の薄い導体球殻 B を、それらの中心を一致させて置いたコンデンサーがある．B の電位を 0 とし、真空の誘電率はε_0とする．

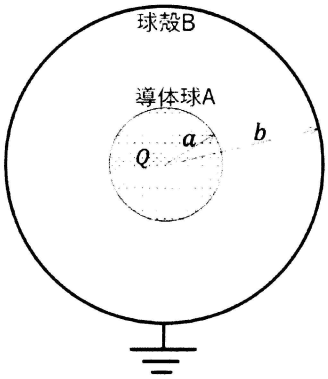

図.2

(a)中心から半径r(但し，$a < r < b$)の位置での電場の大きさと向きを求めよ．

(b) A の電位を求めよ．

(c) Qが正であるとして，電位のグラフを半径rの関数として$0 \leq r \leq 2b$の範囲で示せ．

(d) このコンデンサーの静電容量をε_0 a，bを使って表せ．

(c) このコンデンサーに蓄えられている静電エネルギーをε_0 Q，a，bを使って表せ．

3. x 軸上 $(-\infty < x < \infty)$ をポテンシャル $V(x)$ の下で運動する質量 m の粒子の 1 次元量子力学のエネルギー固有状態を考える。次の設問に答えよ。

(a) ポテンシャルが

$$V(x) = -\Lambda\delta(x)$$

とデルタ関数に比例するとしよう。ただし $\Lambda > 0$ とする。

(i) $x = 0$ で波動関数 $\psi(x)$ は連続だがその一階導関数は不連続になる。一階導関数の $x = 0$ での接続条件を書け。

(ii) すべての束縛状態とそれに対応するエネルギー固有値を求めよ。

(b) つぎに、(a) の場合からさらにもう一つデルタ関数に比例する項を加えて

$$V(x) = -\Lambda\delta(x) - \lambda\delta(x - \ell)$$

の形のポテンシャルを考える。ただし $\Lambda > \lambda > 0$, $\ell > 0$ とする。

(i) $x = 0$ と $x = \ell$ での波動関数とその一階導関数の接続条件から 4 本の式からなる連立方程式が得られる。これを書き下せ。

(ii) (i) の結果を用いると、束縛状態のエネルギー固有値はある一つの方程式の解として定まることがわかる。この方程式を求めよ。

(iii) ℓ を徐々に大きくしていくとある値 ℓ_c を境にして束縛状態の数が変化する。ℓ_c の値を求め、$0 < \ell < \ell_c$ と $\ell_c < \ell$ の場合のそれぞれでの束縛状態の数を求めよ。

(iv) この系の基底状態のエネルギー固有値 E_0 は (a) の場合の値 $E_0^{(0)}$ より必ず小さくなる。さらに、ℓ が十分大きいとき、E_0 は

$$E_0 \simeq E_0^{(0)} + E_0^{(1)}$$

と近似できる。ここで、$E_0^{(1)}$ は ℓ に対して指数関数的に減少する。$E_0^{(1)}$ を求めよ。

4. 真空中の Maxwell 方程式は 4 つの方程式からなる。そのうちの 3 つは以下のとおりである。

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0, \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\
\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, ε_0, μ_0 はそれぞれ電場、磁束密度、真空の誘電率、真空の透磁率である。以下の設問に答えよ.

(a) (i) Maxwell 方程式の残りの一つの式を書け。

(ii) 真空中の Maxwell 方程式から電場に関する波動方程式を導き、伝播速度 c を求めよ。

(iii) 角振動数 ω の平面波解を求め、偏光の向きと自由度の数を答えよ。

(b) 次に、6 つの平面 $x = 0$, $x = L$, $y = 0$, $y = L$, $z = 0$, $z = L$ に囲まれた一辺 L の立方体の真空領域中の電磁場を考える。領域の壁は金属でできており、壁の表面で電場は壁に垂直であり磁束密度は壁に平行であるとする。

(i) $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}) = \sin(\omega t + \theta)\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x})$ および $\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{x}) = \cos(\omega t + \theta)\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})$ の形の解を考える。平面波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ はどのような値をとるか？ ただし、ω は正の定数であり、θ は定数である。

(ii) この系は各偏光と波数ベクトルごとに対応する角振動数 ω を固有角振動数とする調和振動子からなる系と等価である。ω から $\omega + d\omega$ の角振動数をもつ単位体積あたりの調和振動子の数を $g(\omega)d\omega$ とするとき、$g(\omega)$ を求めよ。ただし、ω は十分大きいとする。

(iii) この系が逆温度 β の熱平衡状態にあるとする。ω から $\omega + d\omega$ の角振動数をもつ単位体積あたりの調和振動子のエネルギー密度 $u_\beta(\omega)d\omega$ とするとき、$u_\beta(\omega)$ を求めよ。ただし、零点振動エネルギーは差し引いて考えよ。

すべての出願者が理論物理学研究室を第１志望としているため，大問５及び６は配布しない．