2025 年 2 月 19 日実施

2025 年度(春季)

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程

物理学専攻入学試験問題

(物理学)

〔注意〕合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること.

2. 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ.

3. 大問は 6 問である. 大問 1 〜 6 のうち, 4 問を選択して解答せよ. なお、第 1, 第 2 志望に関わらず理論物理学研究室を志望する場合は, 大問 1 〜 4 の 4 問を解答せよ.

4. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚を用い, 解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ. たとえば大問 1 を選択した場合には, 「1」ではなく「大問 1」と記入すること. 選択した大問の番号が不明確な場合は, 採点対象にしない.

5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること.

1. 質量 m の惑星が質量 M の恒星の周りを公転している．$m \ll M$ と仮定し，惑星の運動のみ考える．惑星の軌道は長半径 a と離心率 e の楕円軌道で，万有引力定数を G として，以下の問いに答えよ．この問題では相対論的効果は考慮しなくてよい．重力ポテンシャルは無限遠で 0 とする．

(a) 恒星の中心を原点とした 2 次元極座標を用いて，原点からの距離 r と 偏角 θ で位置を表現し，r, θ および，G，M，m，位置の時間微分 $\dot{r}$，偏角の時間微分 $\dot{\theta}$，を用いて，惑星の運動エネルギーと位置エネルギーを表せ．

(b) (a) で求めた運動エネルギーと位置エネルギーを用いて，ラグランジアン L を記述せよ．

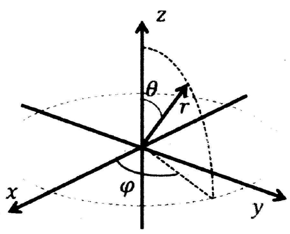
(c) (b) で求めたラグランジアンと，オイラー・ラグランジュ方程式を用いて，r と θ についての運動方程式を導け．

(d) 近星点（両星間の距離が最小になる点）での惑星の速度 v_p と遠星点（両星間の距離が最大になる点）での惑星の速度 v_a との関係を離心率 e を用いて導け．近星点距離 $r_p = a(1-e)$ と遠星点距離 $r_a = a(1+e)$ の関係は用いてよい．

(c) 近星点速度 v_p および 遠星点速度 v_a を G，M，a，e を用いて表せ．

2．真空中の電位 ϕ について，以下の問に答えよ．真空の誘電率を ε_0 とする．

(a) z軸方向の一様な電場 $\vec{E}_0 = (0,0,E_z)$ がある時，直交座標を用いて電位 $\phi(x,y,z)$ を書き表せ．座標原点の電位を 0 とする．



図

(b) (a)の答えを 図に示すような (r,θ,φ) を用いた 3 次元極座標で表せ．

(c) 外場が無い空間、すなわち(a)の問題で $E_z = 0$ の空間に，半径 a の導体球を中心が座標原点に一致するように置き，導体球に電荷 Q を与えた．導体球の外の電位 ϕ を求めよ．電位は無限遠で 0 とする．

(d) z軸方向の一様な電場 $\vec{E}_0 = (0,0,E_z)$がある空間に，半径 a の導体球を中心が座標原点に一致するように置いた．導体球は全電荷が 0 で接地されていない．この時，導体球の外の電位 ϕ は 3 次元極座標における r の関数 $F(r)$ を使って $\phi = F(r)\cos\theta$ で表すことができる．導体球を電位 0 として導体球の外の電位 ϕ を求めよ．なお，極座標におけるラプラス演算子は

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

である．また，無限遠では導体球の影響が無視できることに注意せよ．

(e) (d)の設定での$x-z$平面における，電気力線と等電位線の概略図を描け．

(f) (d)の設定での導体球表面の電荷面密度 σ を求めよ．

3. 1次元中の粒子の量子力学的な運動について考える．位置演算子 $\hat{X}$，運動量演算子を $\hat{P}$ として，次のようなハミルトニアンで与えられる非調和振動子を調べよう．

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2 + g\hat{X}^4, \qquad [\hat{X},\hat{P}] = i\hbar$$

ここで $\hbar$ は換算プランク定数，m は粒子の質量，ω は角振動数，g は実数の定数である．まずハミルトニアンに現れる係数が簡単になるように，次のような変数変換を考える．

$$\hat{X} = \alpha\hat{x}, \qquad \hat{P} = \frac{\hbar}{\alpha}\hat{p},$$

ここで α は定数である．上手く定数 α を選べばハミルトニアンを

$$\hat{H}_0 = \beta\hat{H}, \qquad \hat{H} = \hat{p}^2 + \hat{x}^2 + \lambda\hat{x}^4, \qquad [\hat{x},\hat{p}] = i$$

と表すことができる．再定義されたハミルトニアン $\hat{H}$ の固有値問題

$$\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle, \qquad \langle\varphi|\varphi\rangle = 1$$

について考え，エネルギー固有状態 $|\varphi\rangle$ に対する演算子 $\hat{A}$ の期待値を

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle$$

で表すことにする．以下の問に答えよ．

(a) 定数 α, β, λ を $\hbar, m, \omega, g$ の中から必要なものを用いて表せ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(b) 任意の演算子 $\hat{A}$ に対して，

$$\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle = 0 \tag{1}$$

であることを示せ．ハミルトニアン $\hat{H}$ がエルミート演算子であることとエネルギー固有値 E が実数であることは証明なしに用いてもよい．

(c) (1) 式において $\hat{A} = \hat{x}\hat{p}$ と選ぶとき，$[\hat{H},\hat{x}\hat{p}]$ を計算することで，$\langle\hat{p}^2\rangle = \langle\hat{x}^2\rangle + 2\lambda\langle\hat{x}^4\rangle$ が成り立つことを示せ．これをビリアル定理という．

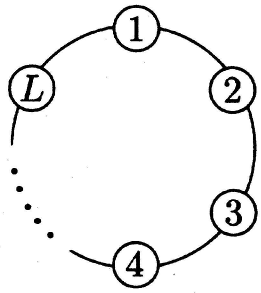
(d) (1) 式において $\hat{A} = f(\hat{x})$ と選ぶことで，$\langle f'(\hat{x})\hat{p}\rangle = \frac{i}{2}\langle f''(\hat{x})\rangle$ が成り立つことを示せ．ただし $f(x)$ は少なくとも2回は微分可能な関数である．

(e) (1) 式において $\hat{A} = \hat{x}^n\hat{p}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ と選ぶことで，

$$n(n-1)(n-2)\langle\hat{x}^{n-3}\rangle + 4nE\langle\hat{x}^{n-1}\rangle - 4(n+1)\langle\hat{x}^{n+1}\rangle - 4\lambda(n+2)\langle\hat{x}^{n+3}\rangle = 0$$

が成り立つことを示せ．

4. 1次元のリング上に配列された L 個の格子について考える．格子には図のように 1 から L までの番号が振られていて区別ができる．この格子上を占有する粒子は以下の 3 つの条件を満たすとする．



- 粒子は区別できない．
- 1 つの格子上には 2 個以上の粒子が占有することはない．
- 粒子が隣り合って占有することはない．

N 個の粒子が存在するとき，格子上に可能な配置の総数を $Z_{L,N}$ とする．例えば $L=3,\ N=1$ のときは $Z_{3,1}=3$ であり，$L=3,\ N=2$ のときは粒子を隣り合わずに配置することはできないので $Z_{3,2}=0$ である．また関数

$$\Xi_L(x) = \sum_{N=0}^{L} Z_{L,N}\, x^N$$

を定義する．以下の問に答えよ．

(a) $Z_{4,2}$ を求めよ．

(b) $\Xi_4(x)$ を x で表せ．

(c) $L \geq 3$ とするとき，$Z_{L,2}$ を L で表せ．

(d) 転送行列の方法を用いて関数 $\Xi_L(x)$ を求めよう．i 番目の格子を占有する粒子の数を n_i とするとき，$\Xi_L(x)$ は

$$\Xi_L(x) = \sum_{n_1=0,1} \sum_{n_2=0,1} \cdots \sum_{n_L=0,1} x^{n_1+\cdots+n_L} \prod_{i=1}^{L} (1-n_i n_{i+1}), \qquad (n_{L+1}=n_1)$$

で与えられる．さらに $t_{n_i,n_{i+1}} = x^{n_i/2+n_{i+1}/2}(1-n_i n_{i-1})$ と定義すれば

$$\Xi_L(x) = \sum_{n_1=0,1} \sum_{n_2=0,1} \cdots \sum_{n_L=0,1} t_{n_1,n_2} t_{n_2,n_3} \cdots t_{n_{L-1},n_L} t_{n_L,n_1}$$

と表すことができる．この事実を用いて $\Xi_L(x)$ を x と L で表せ．

(e) 無限に長いリングを考えて，新しい関数

$$F(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \ln \Xi_L(x)$$

を定義するとき，$F(1)$ の値を求めよ．

すべての出願者が理論物理学研究室を第１ 志望としているため，大問５及び６は配布しない．