2013 年 7 月 21 日実施

２０１４年度（夏季）
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理学）

[注意]

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は 6 題。
  ・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１ ～ ４の４題を解答せよ。
  ・原子核放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は，大問１ ～ ６のうち，４題を選択して解答せよ。
- 大問 1 問に付き解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図のように長さ l の糸に、質量 m のおもりをつけた振子がある。鉛直下方に x 軸をとり、x 軸から反時計回りに角度 θ をとる。重力加速度の大きさを g とし、糸の質量や伸びは無視できるものとする。また振子の運動は図の xy 平面内に限られるとする。ポテンシャルエネルギーの原点はおもりが最下端にあるときとする。次の問いに答えよ。

(a) 振子の力学的エネルギー E を、θ、$\dot{\theta}$、m、l、g を用いて表せ。

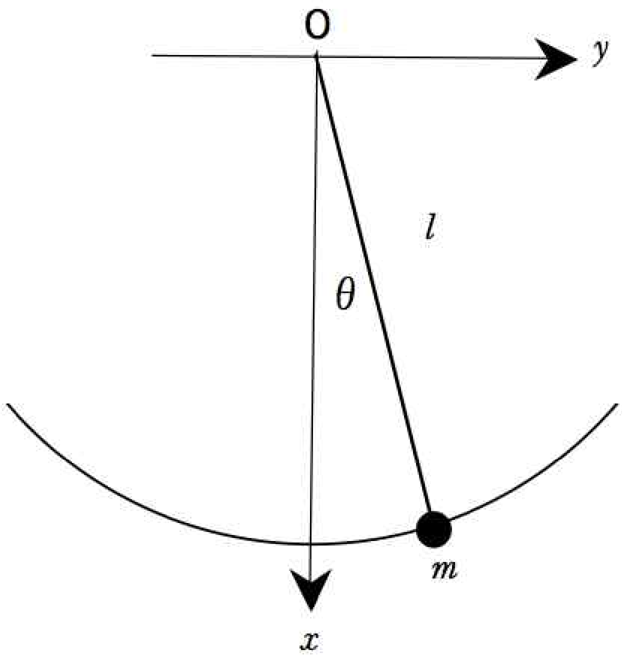
(b) 力学的エネルギー E が保存することから $(dE/dt = 0)$、おもりの運動方程式を導け。

(c) 次にこの問題を角運動量の観点から見る。糸の固定点 O の周りのおもりの角運動量ベクトル $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ を $\dot{\theta}$、m、l を用いて表せ。

(d) おもりに働く O 点周りの力のモーメントベクトル $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$ を θ、m、l、g を用いて表せ。

(e) 角運動量の時間変化と力のモーメントの関係から、おもりの運動方程式を求め、それが (b) で求めたものと同一であることを示せ。

(f) (b) の運動方程式を θ が微小の場合について解き、初期条件 $t = 0$ で $\theta = 0$、$\dot{\theta} = \omega_0$ を与えた時の解を求めよ。



2. 宇宙線が大気に衝突して生成された正電荷を持つパイ中間子 (π^+, $m_\pi = 139.57$ MeV$/c^2$, $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8}$ sec) を考える。次のように π^+ はミューオン (μ^+, $m_\mu = 105.66$ MeV$/c^2$, $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}$ sec) とニュートリノに崩壊するのが主崩壊モードである。

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \tag{1}$$

この崩壊に関連する粒子の運動学について考察する。なお c は光速を表し、m、τ はそれぞれ粒子の質量、寿命を表す。

(a) このような考察において、われわれが観測する系 (実験室系) よりも、粒子の静止系のような別な系で考えると有益であることが多い。今、ある系 (x 系) の x 軸方向に速度 $v = \beta c$ で等速運動している別の系 (x' 系) を考えよう。x 系の 4 元座標を (ct, x, y, z)、x' 系の 4 元座標を (ct', x', y', z') で表す。両座標系の原点を適当にとると、ローレンツ因子 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ を用いて、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

の関係がある (ローレンツ変換)。x' 系での点 A$'$($c\Delta t'$, 0, 0, 0) を考える。A$'$ を x 系へローレンツ変換して得られる点を A($c\Delta t$, Δx, 0, 0) とする。Δt と $\Delta t'$ の関係を γ を用いて書け。これはいわゆる時間のローレンツ延びである。

(b) $\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ の 2 体崩壊を π^+ の静止系で考察する。

(i) パイ中間子の全エネルギー E_π、ミューオンの全エネルギー E_μ、ニュートリノの全エネルギー E_ν についてのエネルギー保存則を、m_π, m_μ, c とミューオンの運動量の大きさ p_μ を使って書け。ただしニュートリノの質量をゼロと近似する。

(ii) E_μ を m_π, m_μ, c を用いて表せ。

(iii) ミューオンの速度の大きさ v_μ を m_π, m_μ, c を用いて書け。

(iv) ミューオンの運動エネルギー T_μ を MeV の単位を用いて書け (有効数字 1 桁)。

(c) 実験室系で考える。パイ中間子の全エネルギーを $E^*_\pi = 20$ GeV とする。崩壊生成物の全エネルギー E^*_μ,E^*_ν は、崩壊時の射出角度によって様々な値を取りうる。

(i) ミューオンとニュートリノそれぞれについて、とりうる最大の全エネルギー $E^*_{\mu,\max}$, $E^*_{\nu,\max}$ を GeV の単位を用いて有効数字 2 桁の精度で求めよ。

(ii) 全エネルギーが $E^*_{\mu,\max}$ であるミューオンについて考える。ミューオンの静止系においてミューオンの生成から崩壊までの時間が $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}$ sec であったとき、実験室系におけるミューオンの飛行距離を有効数字 2 桁の精度で求めよ。ただし飛行中における磁場の影響やエネルギー損失は考慮しない。

3. 1 次元ポテンシャル

$$\begin{array}{rcll} V(x) & = & 0 & (x < 0) \quad [\text{領域 I}] \\ V(x) & = & -V_0 & (0 \le x \le a) \quad [\text{領域 II}] \\ V(x) & = & 0 & (x > a) \quad [\text{領域 III}] \end{array}$$

を考える。いま質量 m、エネルギー E の粒子が、領域 I から領域 II に入射してくる場合を量子力学的に取り扱う。ここで、$E > 0$、$V_0 > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

(a) 領域 I, II, III それぞれにおけるシュレーディンガー方程式を書け。

(b) 領域 I における入射波の振幅を A、反射波の振幅を B、領域 III における透過波の振幅を C とする。A/C と B/C を求めよ。

(c) 領域 I への反射率 R と領域 III への透過率 T を求めよ。

4. 絶対温度 T の金属の壁でできた一辺が L の立方体（体積 $V = L^3$）の空洞内が金属壁と熱平衡にある光子気体で満たされている状態を考える。以下の設問に答えよ。なお、以下の設問において、ボルツマン定数を k_B、プランク定数を h で表せ。

(a) 振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある光子の量子状態の数を $g(\nu)d\nu$ とする。$g(\nu)$ を求めよ。

(b) 振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある光子の空洞内におけるエネルギーを $E(\nu)d\nu$ とする。$E(\nu)/V$ を求めよ。

(c) $E(\nu)/V$ の ν 依存性の概略を図示し、絶対温度 T が大きくなったとき、この分布がどの様に変化するかを定性的に説明せよ。

5. 以下の問いに答えよ。

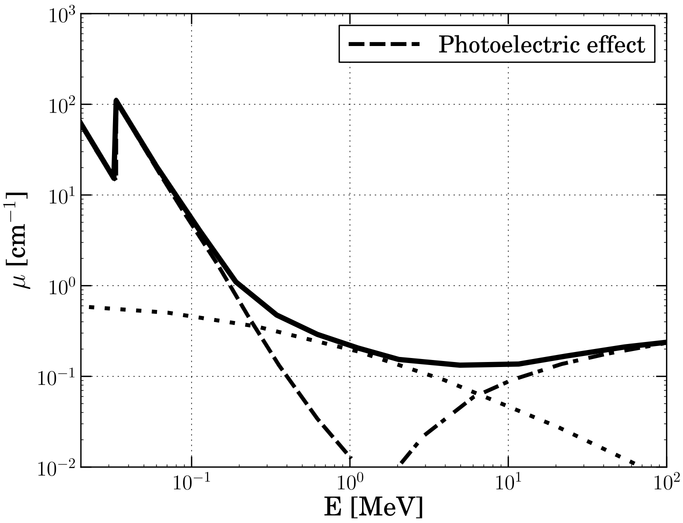
(a) ガンマ線源からの崩壊ガンマ線をシンチレータを用いて計測する実験を考える。$\Delta t = 10$ min の時間で、$N = 400$ counts の事象が計測されたとする。

(i) 事象数 N の統計誤差 $\sigma_N(1\sigma)$ を計算せよ。

(ii) 計測された事象には、線源由来のものだけでなく、環境放射線などによるバックグラウンド事象が含まれている。そこでバックグラウンド測定を $\Delta t = 10$ min の測定時間で行い、$B = 41$ counts が計測された。バックグラウンド環境は時間的に変わらないとして、線源由来の事象数 S と、その統計誤差 $\sigma_S(1\sigma)$ を計算せよ。

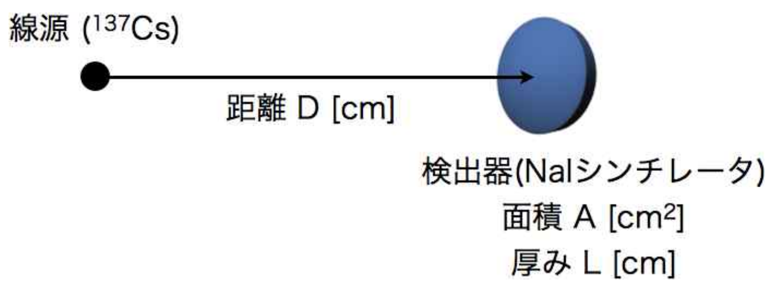
(b) 下図に示したのは、NaI 結晶のガンマ線に対する線吸収係数 $\mu(E)$ [cm^{-1}] である。[**ア**], [**イ**] に当てはまる適切な物理用語を答えよ。

「エネルギー $E \sim 0.2$ MeV 以下のガンマ線に対しては光電吸収が最も重要な過程であり、$E \sim 10$ MeV 以上では [**ア**] によるガンマ線吸収が卓越する。これらの間の中間エネルギー帯域で重要なのは [**イ**] である。」



(c) ^{137}Cs 線源からのエネルギー $E = 662$ keV のガンマ線を、距離 $D = 500$ cm に置いた NaI 結晶シンチレータで計測する実験を考える (下図)。シンチレータの面積を $A = 100$ cm^2、厚みを $L = 3$ cm とする。D は十分に大きいのでガンマ線はシンチレータ面に垂直に入射するとみなして良い。また 1 つの入射ガンマ線光子に対してシンチレータ内での複数回の吸収散乱過程は考えない。^{137}Cs の壊変率 $B = 1$ MBq とし、壊変あたりの 662 keV ガンマ線放出率を $\kappa = 0.85$ とする。測定時間は $\Delta t = 30$ min とする。

ガンマ線計測セットアップの模式図



(i) ^{137}Cs は半減期 30.1 年で ^{137m}Ba にベータ崩壊する。^{137m}Ba は半減期 2.55 分で 662 keV のガンマ線の放出を伴って ^{137}Ba に崩壊する (核異性体転移)。今回の測定中、壊変率 B が一定であると見なせる理由を簡潔に述べよ。

(ii) 662 keV ガンマ線によってシンチレータ内に測定時間 Δt 中に生じる反応事象数の平均値 $\bar{S}$ を有効数字 2 桁で計算せよ。ただし簡単のため $\mu(E = 662\,\mathrm{keV}) = 0.33\ \mathrm{cm}^{-1}$ とする。必要なら $\pi \simeq 3.14159265$, $e \simeq 2.7182818$ を用いて良い。

6. A 群に与えられた粒子・光子群から 1 つを選び、その粒子の運動エネルギーまたは光子のエネルギーを実験的に測定する方法について、B 群のキーワードから適当なもの（複数選択可）を用いて測定原理、測定方法について記述せよ。

A 群：
(a) 10 eV の紫外線　(b) 10 eV の電子　(c) 100 eV の He イオン　(d) 600 keV のガンマ線　(e) 5 MeV の α 線

B 群：
回折格子分光器、静電型エネルギー分析器、飛行時間法、シンチレーション検出器、電離箱、半導体検出器