2013 年 2 月実施

２０１３年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理学）

[注意]

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は 6 題。
  ・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１ ～ ４の４題を解答せよ。
  ・原子核放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は，大問１ ～ ６のうち，４題を選択して解答せよ。
- 大問 1 問に付き解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図 1 のように，厚さの無視できる質量 M，一辺の長さ a の密度が一様な正方形の板がある。板の質量中心（重心）O を原点とした座標軸を (X, Y, Z)，一つの頂点 o を原点とした座標軸を (x, y, z) として，以下の問いに答えよ。ただし，X, Y 軸，および x, y 軸は正方形の二辺に平行である。

(a) X 軸，Y 軸，Z 軸の周りの慣性モーメント I_X，I_Y，I_Z を求めよ。

(b) 慣性モーメントに関する定理「質量 M の剛体の任意の軸の周りの慣性モーメント I は，その軸と質量中心 G との距離を h，質量中心を通りその軸に平行な軸の周りの慣性モーメントを I_{G} とするとき，$I = I_{\mathrm{G}} + Mh^2$ である」を用いて，z 軸の周りの慣性モーメント I_z を求めよ。

(c) (b) の定理を用いず，z 軸の周りの慣性モーメント I_z を求め，(b) の結果と同じになることを確かめよ。

(d) 正方形の板を Z 軸の周りに角度 θ だけ回転させた。このときの X 軸，Y 軸，Z 軸の周りの慣性モーメント I'_X，I'_Y，I'_Z を求めよ。

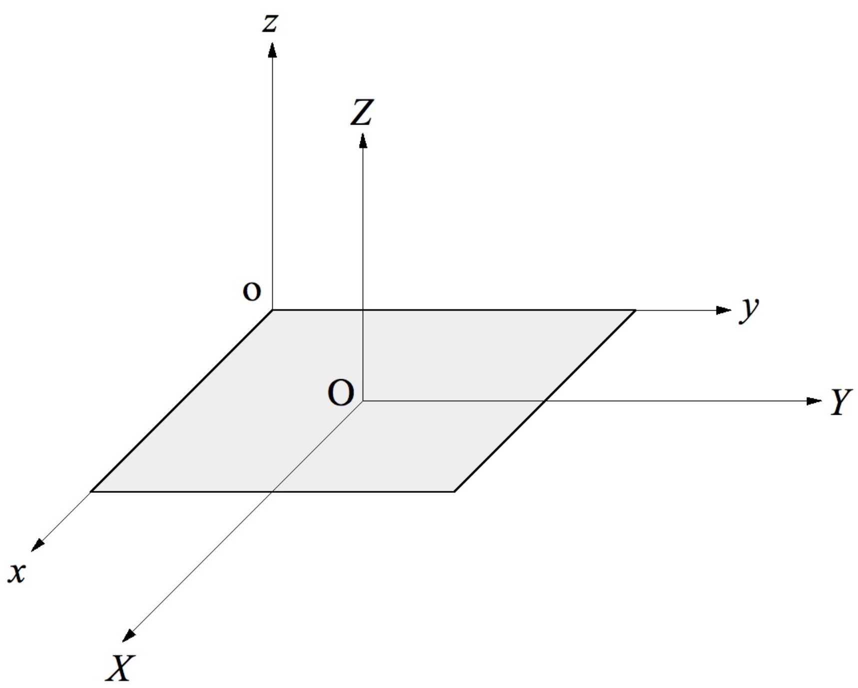

図 1

2. 真空中で，電流が作る磁場（磁束密度）と誘導起電力について考える。真空の透磁率を μ_0 とする。

(a) 電流 I が流れる導線の，微小部分 $\delta\vec{\ell}$ が，そこから $\vec{r}$ の位置に作る磁場 $\delta\vec{B}$ を書き表せ。

(b) 図 2 – 1 のように，xy 平面上で中心が z 軸上にある半径 a の円形の輪（導体でできた円環）がある。この輪に一定の電流 I が z 軸正方向から見て反時計回りに流れている。z 軸上に作る磁場の大きさと方向を z の関数として求めよ。

(c) (b) の設定に加えて，図 2 – 2 のように，xy 平面に平行で，中心が z 軸上にある半径 b の小さな円形の輪 C が，z 軸の正の方向に速さ v で動いているとする。輪 C に誘導される起電力 ε を z の関数として求めよ。なお，小さな輪 C に囲まれた領域の磁場はどこでも一定で，z 軸上の磁場と同じと近似してよい。

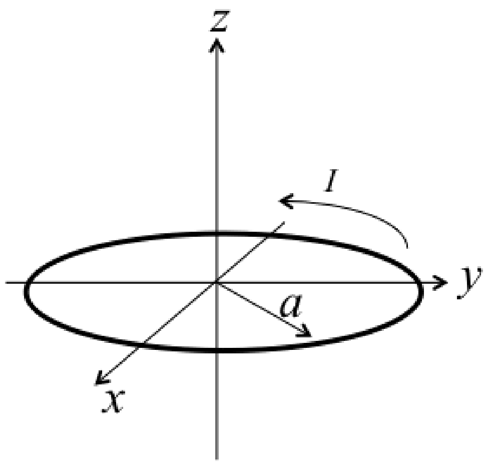

図 2 – 1

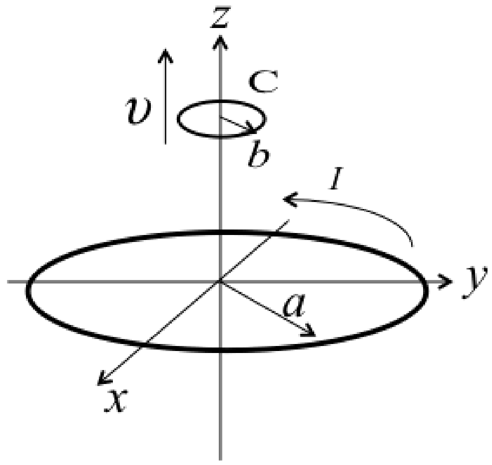

図 2 – 2

3. 中心力ポテンシャル

$$V(r) = -V_0 \delta(r-a), \quad V_0 > 0, \tag{1}$$

の中を運動する質量 m_0 の粒子の束縛状態を考える。以下の設問に答えよ。

(a) 極座標 (r, θ, φ) を用いて，波動関数 ψ を

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\chi_\ell(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \tag{2}$$

と変数分離するとき，$\chi_\ell(r)$ のしたがう Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2\chi_\ell(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m_0 r^2}\right]\chi_\ell(r) = E\chi_\ell(r) \tag{3}$$

となることを示せ。ただし，$Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ は球面調和関数であり，微分方程式

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\right] Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \tag{4}$$

を満たすものとする。

(b) 原点ならびに無限遠における境界条件に注意して，$r < a$ と $r > a$ のそれぞれの領域で $\ell = 0$ のときの式 (3) を解け。

(c) $r = a$ を含む微小区間 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ を考える。$d\chi_0/dr|_{r=a+\epsilon}$ と $d\chi_0/dr|_{r=a-\epsilon}$ の満たす関係式を求めよ。

(d) 束縛状態が存在するために必要な最小の V_0 を求めよ。

4. 互いに相互作用しない大きさ S のスピン N 個が，z 方向を向いた一様磁場 $\vec{H}=(0,0,H)$ 中に置かれ，温度 T の熱平衡状態にあるとする。このとき，単独のスピンのエネルギー ϵ は，スピンの z 方向の成分を m として

$$\epsilon=-g\mu_{\mathrm{B}}Hm,$$

であり，m は

$$m=-S,-S+1,-S+2,...,S-1,S,$$

の値を取り得る。ただし，μ_{B} はボーア磁子，g は定数である。各スピンは独立であるから，スピン1個に着目してこの系を解析しよう。解答には，k_{B} をボルツマン定数として $\eta=\dfrac{g\mu_{\mathrm{B}}H}{k_{\mathrm{B}}T}$ を用いるとよい。

(a) $S=1/2$ のとき，単独のスピンの分配関数を求めよ。

(b) 単独のスピンの磁気モーメントの z 成分は $\mu_z=g\mu_{\mathrm{B}}m$ である。$S=1/2$ のとき，μ_z の期待値 $\bar{\mu}_z$ を求めよ。

(c) 一般の S に対して，単独のスピンの分配関数を求めよ。

(d) 一般の S に対して，$\bar{\mu}_z$ を求めよ。ただし，Brillouin 関数

$$B_S(x)=\frac{1}{S}\left\{\left(S+\frac{1}{2}\right)\coth\left[\left(\frac{2S+1}{2S}\right)x\right]-\frac{1}{2}\coth\left(\frac{x}{2S}\right)\right\}, \qquad (1)$$

を用いると便利である。

(e) 十分高温では $\bar{\mu}_z$ は

$$\bar{\mu}_z\simeq\alpha\frac{H}{k_{\mathrm{B}}T} \qquad (2)$$

というふるまいをする。一般の S に対して α を求めよ。

(f) 一般の S に対して，十分低温における $\bar{\mu}_z$ のふるまいを求めよ。

5. 宇宙空間での気体の作る圧力について考える。ボルツマン定数を k_{B}，重力定数を G，プランク定数を h とする。

(a) 半径 R で球対称に分布する理想気体として扱える気体がある。温度は半径によらず一定値 T とする。半径 r での密度（単位体積当たりの質量）を $\rho(r)$，中心から半径 r までの気体の総質量を $M(r)$ と書く事にする。

i. 中心から半径 r_0 までの気体の総質量 $M(r_0)$ を $\rho(r)$ を使って積分の形で書き表せ。

ii. 気体の分子 (または原子）の質量を m とする。半径 r での圧力 $P(r)$ を密度 $\rho(r)$，温度 T 等を使って書き表せ。

iii. 半径 r の位置にある微小体積中の気体が受ける重力が，気体の作る圧力による力と釣り合っている場合の釣り合いの式を書き表せ。

(b) 理想フェルミ気体として扱える電子の気体が完全に縮退しているとしよう。電子の最大の運動量を p_0 とする。

i. 単位体積当たりの電子の個数を求めよ。

ii. 電子は等方的に運動しているとする。電子が作る平均圧力 P を求めよ。但し，電子の最大運動量 p_0 はあまり大きくなく，電子の質量を m_e，速さを v とした場合，運動量は $p = m_e v$ で表すことができるとする。（ヒント：単位面積の板を考え，その板に電子が衝突して跳ね返るとする。電子がその板に与える単位時間あたりの運動量を計算すれば良い。）

6. 以下の問いに答えよ。必要であれば以下の数値を用いよ。

素電荷：$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, ボルツマン定数：$k_{\mathrm{B}} = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K，プランク定数：$h = 6.6 \times 10^{-34}$ J·s, 光速： $c = 3.0 \times 10^{8}$ m/s

(a) 現在研究が進められている核融合発電では以下の核融合反応が利用されている。

$${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \mathrm{n}$$

重水素の原子核，三重水素の原子核，He の原子核，中性子の質量はそれぞれ 3.3436×10^{-27} kg, 5.0074×10^{-27} kg, 6.6447×10^{-27} kg，1.6749×10^{-27} kg である。重水素と三重水素の核融合反応において，１反応あたり放出されるエネルギー E_{DT} を有効数字２桁で求めよ。結果の単位は eV とせよ。

(b) 上の (a) の反応で放出されるエネルギー E_{DT} は核融合反応後に二つの粒子の運動エネルギーとなる。重心系における中性子の運動エネルギー E_{n} と He 原子核の運動エネルギー E_{He} の比 $E_{\mathrm{n}}/E_{\mathrm{He}}$ を求めよ。

(c) ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ は α 崩壊を M 回，β 崩壊を N 回行って，最終的には安定な ${}^{207}_{82}\mathrm{Pb}$ になる。M と N を求めよ。

(d) 原子に束縛されている電子の束縛エネルギーは 10 eV 程度であるが，原子核に束縛されている核子の束縛エネルギーは 10^{6} eV 程度である。このことから不確定性原理を用いて原子と原子核の大きさの比を有効数字 1 桁で求めよ。電子と核子の質量比は 1/2000 とせよ。