受験番号			

2003. 2. 28

2003年度
理学研究科博士課程　前期課程　物理学専攻　入学試験問題
（物　理　学）

［注意］次の問題すべてに解答すること。
解答はすべて解答用紙に記入し、問題1問につき解答用紙1枚を使用すること。

問1 次の設問に答えよ。

(a) 半径 R の球の内部が一様な電荷密度で帯電している。球の内側と外側の電場を求めよ。ただし、全電荷を Q とする。

(b) 球の表面における電位を求めよ。

(c) 原子番号 Z, 質量数 A の原子核の形は近似的に球とみなすことができ、その半径を R とする。球の内部には、電荷 Ze (e は素電荷) が一様な電荷密度で分布しているものとする。　この原子核に陽子を衝突させて核反応を起こさせるためには、陽子と原子核の間のクーロン斥力に打ちかって陽子が原子核の表面に到達できるように、陽子に十分な運動エネルギーを与えて原子核に当ててやる必要がある。
必要な最小の運動エネルギーを求めよ。 ただし、陽子の大きさは無視できるものとする。

(d) (c) の原子核の静電エネルギーを求めよ。

問2 温度 T の壁で囲まれた、1辺 L の立方体の空洞がある。 空洞内には壁と熱平衡状態にある空洞放射が満ちているものとして、次の設問に答えよ。

(a) 固有振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある基準振動の状態数を $D(\omega)d\omega$ とするとき、周期的境界条件のもとで状態密度 $D(\omega)$ を求めよ。

(b) 固有振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある電磁波の成分のエネルギー密度を $\epsilon(\omega)d\omega$ とするとき、$\epsilon(\omega)$ に対するプランクの放射公式を求めよ。

(c) プランクの放射公式 $\epsilon(\omega)$ を固有振動数について積分し、単位体積に含まれる空洞放射の全エネルギーを求めよ。ただし、次の積分公式を利用せよ。

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

問3　スピンの向きを表す2成分のベクトル（スピノル）$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を基底として行列表示されたスピン演算子 $\boldsymbol{S}$ の性質を確かめることにする。　次の設問に答えよ。

(a) α、β の規格直交性 $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle = 1, \langle\alpha|\beta\rangle = 0$ を示せ。

(b) スピン角運動量成分 S_x, S_y, S_z の行列表示が

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

で与えられるものとする。

1. α と β が $\frac{\hbar}{2}$ と $-\frac{\hbar}{2}$ の固有値を持つ S_z の固有ベクトルであることを示せ。
2. また、α と β がともに $\frac{3}{4}\hbar^2$ の固有値を持つ $\boldsymbol{S}^2$ の固有ベクトルであることを示せ。
3. $\boldsymbol{S}$ の成分間の交換関係 $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$, $[S_y, S_z] = i\hbar S_x$, $[S_z, S_x] = i\hbar S_y$, $[\boldsymbol{S}^2, S_x] = [\boldsymbol{S}^2, S_y] = [\boldsymbol{S}^2, S_z] = 0$ を示せ。

問4　次の文を読み、（イ）から（ト）のそれぞれにあてはまる適切な数式を書け。

電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を運動する質量 m、電荷 q の荷電粒子が従う古典力学の非相対論的な運動方程式は（イ）である。　ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ で電場、磁場はそれぞれ（ロ）、（ハ）のように表わされる。　上の運動方程式に対するラグランジアンは（ニ）である。このラグランジアンからハミルトン力学の正準運動量 $\boldsymbol{P}$ とハミルトニアン H はそれぞれ、（ホ）、（ヘ）と求まる。従って、波動関数 ψ に対するシュレディンガー方程式は（ト）となる。

問５　図のように電源と抵抗 (抵抗値：R〔Ω〕) およびコイル (インダクタンス：L〔H〕) を直列につないだ回路がある。この回路の電源として直流電源をつないで電圧をかけ電流を流し、図の２点Ａ、Ｂ間の電圧と回路を流れる電流を測定した。続いて電源を交流電源に代えて同様の測定を行った。表１には直流電源の場合の電流と２点A,B間の電圧の測定結果を示す。表２は交流電源の場合についての結果である。なお交流電源の周波数は５０ Hz である。次の設問に答えよ。

(a) 直流電源による結果ならびに交流電源による結果を解答用紙に添付したグラフ用紙に記入せよ。縦軸、横軸を指定し、おのおのの単位を明記せよ。なお、直流電源の結果と交流電源の結果を同じグラフに記入せよ。

(b) 測定結果に最も適する直線を直流電源と交流電源のそれぞれについて求めよ。なお、直線は原点を通るものとする。また、求めた直線を (a) のグラフに記入せよ。

(c) 抵抗の抵抗値 R〔Ω〕とコイルの自己インダクタンス L〔H〕を求めよ。

表 1: 直流電源の場合

電圧 (V)	電流 (mA)
1.0	1.1
3.0	2.9
5.0	4.9
6.9	6.8

表 2: 交流電源の場合

電圧 (V)	電流 (mA)
4.0	1.1
4.9	1.3
6.1	1.5
8.1	2.0